

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ МОДЕЛЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

Д. А. Петрянин, Н. К. Юрков

Введение

Основу математических моделей многих процессов и явлений в физике, электронике, экономике и других областях составляют уравнения различного вида: нелинейные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и т.д. Для решения подобных уравнений необходимо иметь возможность вычислять значения функций, входящих в описание математической модели рассматриваемого процесса или явления, при произвольном значении аргумента. Для сложных моделей подобные вычисления могут быть трудоемкими даже при использовании компьютера.

Используемые в математических моделях функции могут быть заданы как аналитическим способом (в виде формулы), так и табличным, при котором функция известна только при определенных дискретных значениях аргумента. В частности, если функциональная зависимость получена в результате расчетов, проведенных на ЭВМ, или в процессе измерений, осуществленных в рамках какого-либо эксперимента, то она оказывается заданной именно табличным способом. На практике нам могут понадобиться значения функции и в других точках, отличных от тех, что заданы в таблице. Однако получить эти значения можно только путем сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов.

Таким образом, с точки зрения экономии времени и средств мы приходим к задаче вычисления приближенных значений функции $f(x)$ (описывающей экспериментальные данные) при любом значении аргумента на основе имеющихся табличных данных.

Эта задача решается путем приближенной замены функции $f(x)$ более простой функцией $\phi(x)$, которую нетрудно вычислять при любом значении аргумента x в заданном интервале его изменения. Приближение функции $f(x)$ более простой функцией $\phi(x)$ называется аппроксимацией.

От выбора вида аппроксимации зависит значение погрешности – для одних моделей больше, для других меньше. Аппроксимация с помощью найденной модели осуществляется с погрешностью, которая значительно ухудшает результаты исследования [1–3]. Необходимо снизить погрешность аппроксимации, снижающую погрешность экспериментального исследования.

Выбор модели аппроксимации. Как правило, выбор модели аппроксимации определяется по минимальному значению погрешности, как на всем интервале исходных данных, так и для конкретно взятого промежутка.

Входные данные до уточнения модели аппроксимации представляются в следующем виде:

$$\begin{cases} x \in [x_1 \dots x_n], \\ y \in [y_1 \dots y_n], \end{cases} \quad (1)$$

где n – количество узлов; $x_1 \dots x_n$ и $y_1 \dots y_n$ – экспериментальные данные (заданные табличным способом) причем $y = N_n(x)$, здесь $N_n(x)$ – функция экспериментальных данных в n узле.

Для расчетов необходимо использовать несколько видов аппроксимаций, чтобы определить более точное описание зависимости экспериментальных данных $y = N(x)$. Для удобства (записи в формулах) условно принимаем нумерацию видов аппроксимации вместо их названий $(1 \dots i)$.

В случае, когда исходное значение y превышает рассчитанное значение i -го вида аппроксимации $F_{Ai}(x)$, т.е. $y_n > F_{Ai}(x)$ (рис. 1), то уточнение аппроксимации происходит по модели (2):

$$\begin{cases} F_{вр1}(x) = y_1 + |y_1 - F_{A1}(x)|, \\ F_{вр2}(x) = y_2 + |y_2 - F_{A2}(x)|, \\ F_{вр3}(x) = y_3 + |y_3 - F_{A3}(x)|, \\ \dots \\ F_{врi}(x) = y_n + |y_n - F_{Ai}(x)|, \end{cases} \quad (2)$$

где $F_{врi}(x)$ – временное значение исходных данных i -го вида аппроксимации; $F_{Ai}(x)$ – значение найденной функции i -го вида аппроксимации.

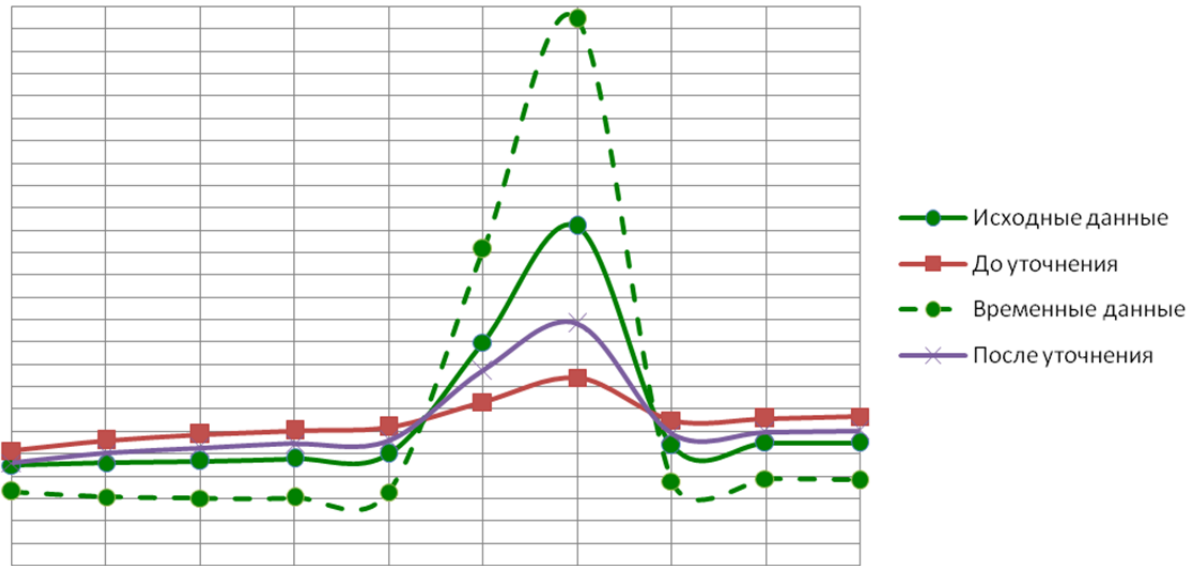


Рис. 1. Графическое представление уточнения аппроксимации

Когда исходное значение y меньше рассчитанного значения i -го вида аппроксимации $F_{Ai}(x)$, т.е. $y_n < F_{Ai}(x)$, то уточнение аппроксимации происходит по модели (3):

$$\begin{cases} F_{вр1}(x) = y_1 - |y_1 - F_{A1}(x)|, \\ F_{вр2}(x) = y_2 - |y_2 - F_{A2}(x)|, \\ F_{вр3}(x) = y_3 - |y_3 - F_{A3}(x)|, \\ \dots \\ F_{врi}(x) = y_n - |y_n - F_{Ai}(x)|. \end{cases} \quad (3)$$

В случае равенства исходного значения y и рассчитанного значения i -го вида аппроксимации $F_{Ai}(x)$, т.е. $y_n = F_{Ai}(x)$, то уточнение модели аппроксимации в данном случае не происходит (4):

$$\begin{cases} F_{вр1}(x) = y_1, \\ F_{вр2}(x) = y_2, \\ F_{вр3}(x) = y_3, \\ \dots \\ F_{врi}(x) = y_n. \end{cases} \quad (4)$$

Для определения точности рассчитывают погрешность (относительная ошибка аппроксимации) в каждой точке по известной формуле

$$A = \frac{\sum \left| \frac{Y - Y_R}{Y} \right|}{n} \cdot 100 \%, \quad (5)$$

где Y – исходное значение экспериментальных данных; Y_R – расчетное значение функции; n – количество узлов. Ошибка аппроксимации в пределах 5–7 % свидетельствует о хорошем подборе функции к исходным данным.

Данная модель повышения точности аппроксимации отличается от существующих:

- 1) возможностью отсутствия дополнительного сбора экспериментальных данных;
- 2) нахождением временных данных, на основе которых происходит уточнение.

Разработана методика снижения погрешности аппроксимации за счет многопроходных расчетов и нахождения случайной ошибки аппроксимации (рис. 2). За основу была взята методика анализа данных Н. Некипелова [4], которая отличается от разработанной следующими свойствами:

- 1) поиск временных данных и модели по ним;
- 2) проверкой приемлемости качества найденной модели после каждого расчета;
- 3) нахождением и расчетом случайной ошибки аппроксимации в каждой точке исходных данных.

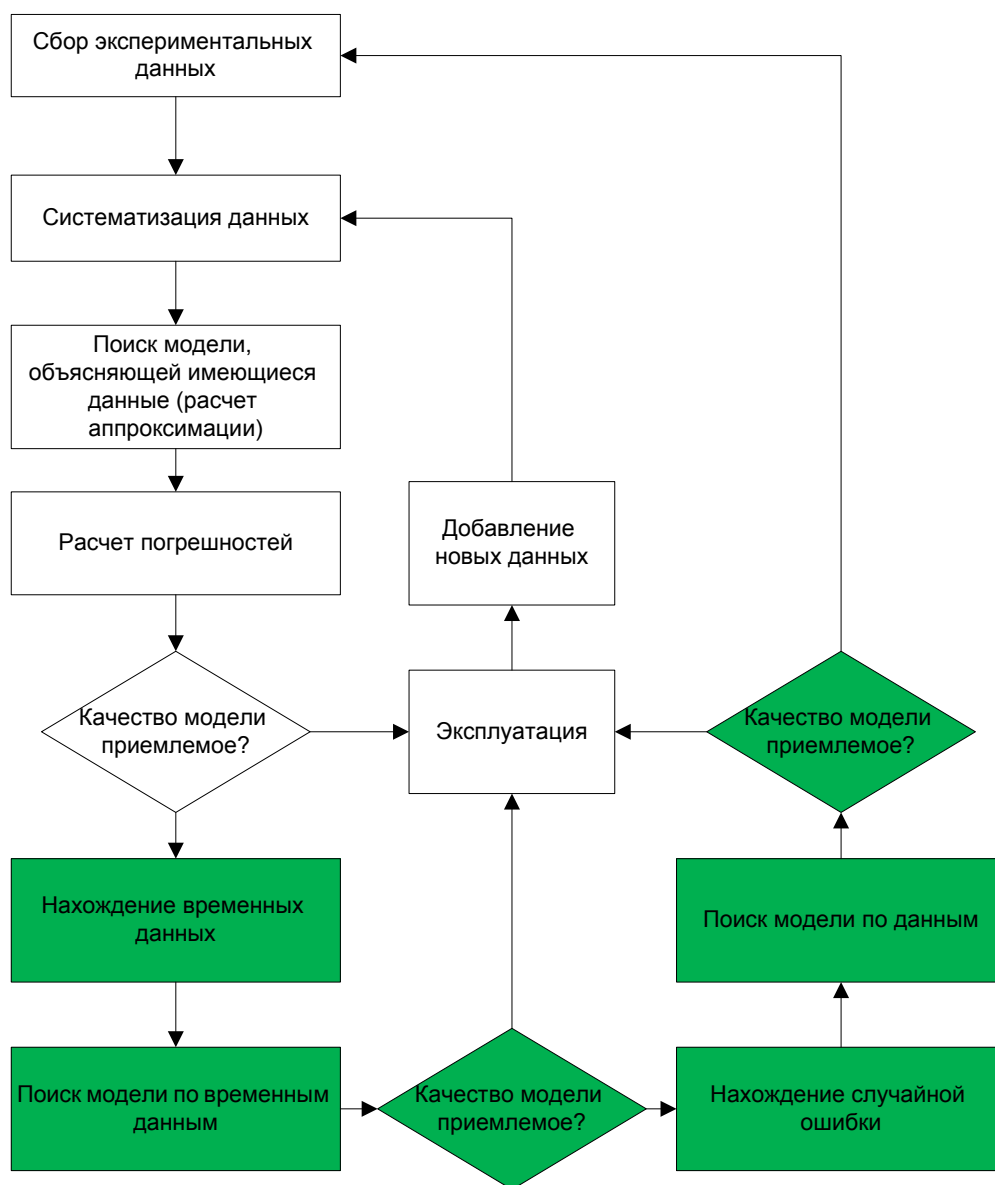


Рис. 2. Методика снижения погрешности аппроксимации

Нахождение временных данных происходит по моделям (2)–(4).

Данная модель позволит решать задачи исследования технических направлений, результаты которых будут более точными и близки к исходным данным.

Алгоритм повышения точности модели аппроксимации, представленный на рис. 3, работает следующим образом. Пользователем загружаются экспериментальные данные (x, y) и выбираются используемые виды аппроксимации $(F_{A1}, F_{A2}, F_{A3} \dots F_{An})$. По загруженным данным определяется количество узлов n , рассчитываются аппроксимации с погрешностями и осуществляется выбор оптимальной модели аппроксимации. Пользователь определяет качество полученной модели (по значениям погрешности, по точности в определенных интервалах данных). Если качество не удовлетворяет пользователя, происходит уточнение аппроксимации – определяются временные данные, по которым повторно рассчитываются аппроксимации и погрешности. Здесь погрешности вычисляются на основе исходных данных. Затем происходит проверка на качество новой модели. При отрицательном решении (пользователя) осуществляется расчет случайных ошибок аппроксимации в каждой точке для дальнейшего анализа данных или возможности получения новых экспериментальных данных.

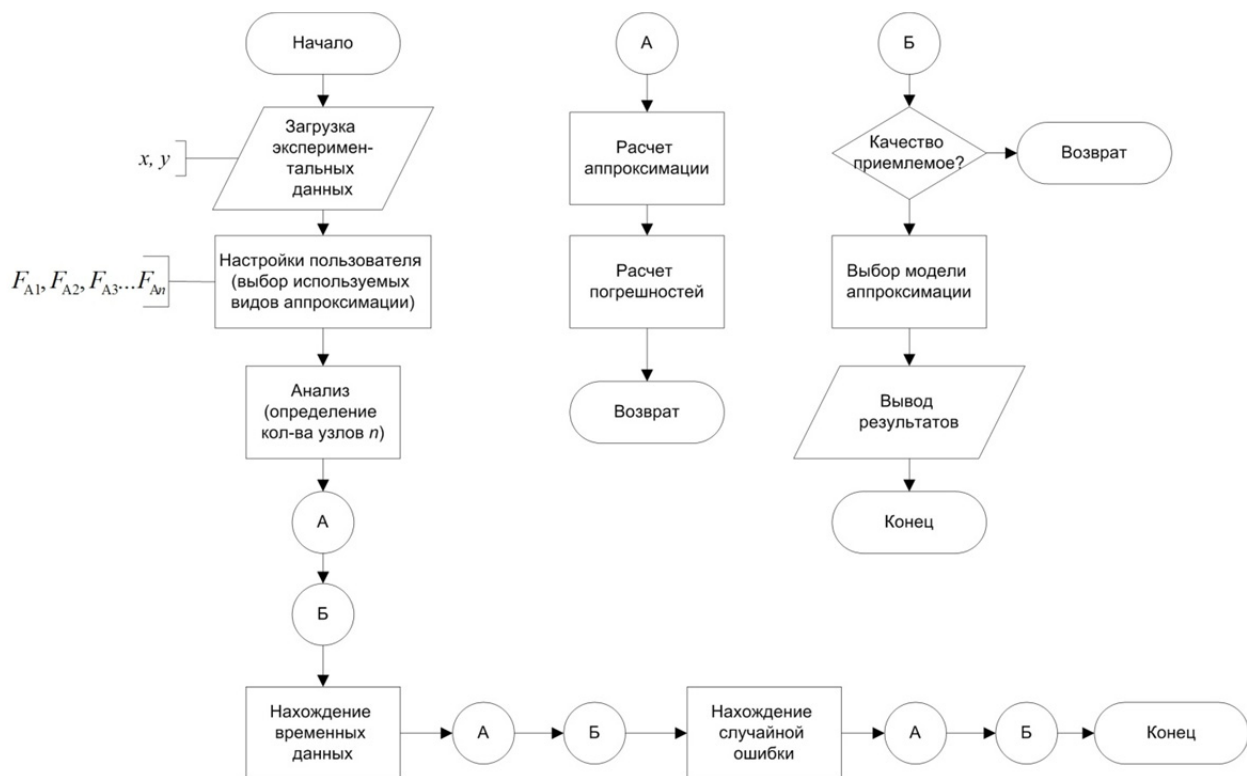


Рис. 3. Алгоритм повышения точности модели аппроксимации

Для расчетов аппроксимации, их относительных ошибок, снижения погрешности и выбора оптимальной модели аппроксимации разработано программное обеспечение «Выбор метода аппроксимации» [5] на основе разработанного алгоритма (рис. 4).

В программе присутствуют два способа ввода данных: ручной ввод или готовый файл с экспериментальными данными. Также реализованы следующие виды аппроксимации: метод наименьших квадратов (функции: линейная, парабола, экспоненциальная, степенная, гипербола, логарифмическая, кубическая парабола), интерполяция (линейная, полином Лагранжа, полином Ньютона).

На рис. 4 представлены результаты расчетов погрешностей аппроксимации «до» и «после» уточнения моделей. В качестве исходных данных использовались экспериментальные значения температуры процессора ЭВМ (при выполнении различных задач: очистка диска, копирование файлов, запуск программ).

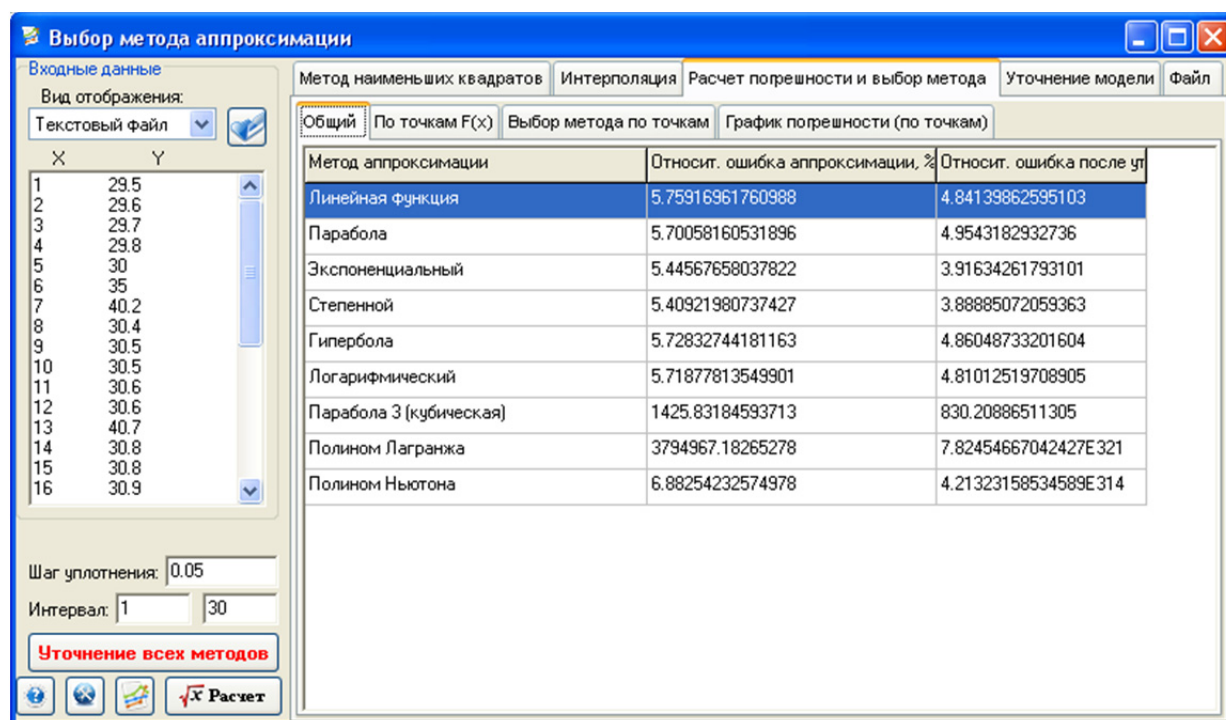


Рис. 4. Результат работы программы «Выбор метода аппроксимации»

На рис. 5 представлены графические результаты исходных и временных данных, расчетные значения «до» и «после» уточнения моделей (для степенного вида аппроксимации).

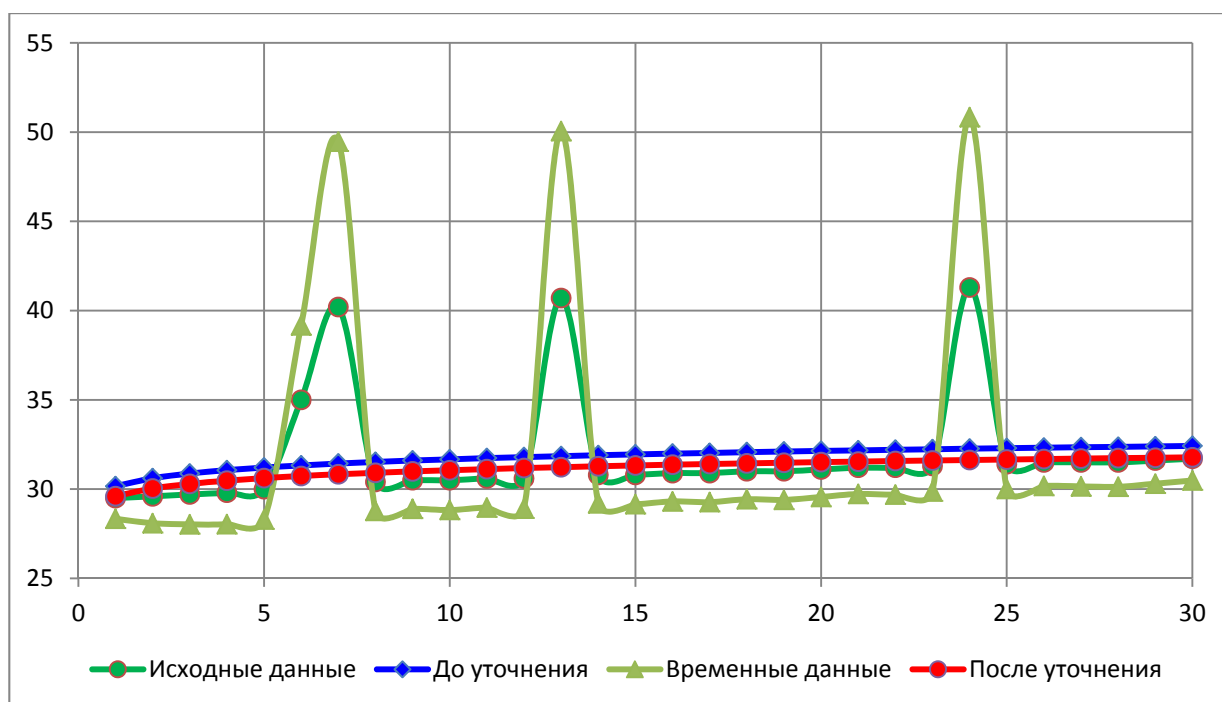


Рис. 5. Графические результаты уточнения степенного вида аппроксимации

Из рис. 4 и 5 видно, что разработанные математическая модель повышения точности метода аппроксимации и методика снижения погрешности работоспособны, актуальны и дают неплохой результат для методов наименьших квадратов. Здесь можно прокомментировать тот факт, что в найденной модели (степенного вида аппроксимации) не удалось повысить точность в некоторых точках (см. рис. 5). Это объясняется двумя причинами:

- 1) имеются отклонения считывания данных с температурного датчика;
- 2) найденная модель не соответствует данному процессу – для этого необходимо реализовать в программе намного больше способов аппроксимации, для получения наиболее подходящего решения.

В случае с большим количеством экспериментальных данных (более 100 узлов) в программе предусмотрена возможность разбиения данных на несколько частей. Для каждой части находится оптимальная модель аппроксимации и рассчитывается погрешность. Результаты такого исследования представлены на рис. 6.

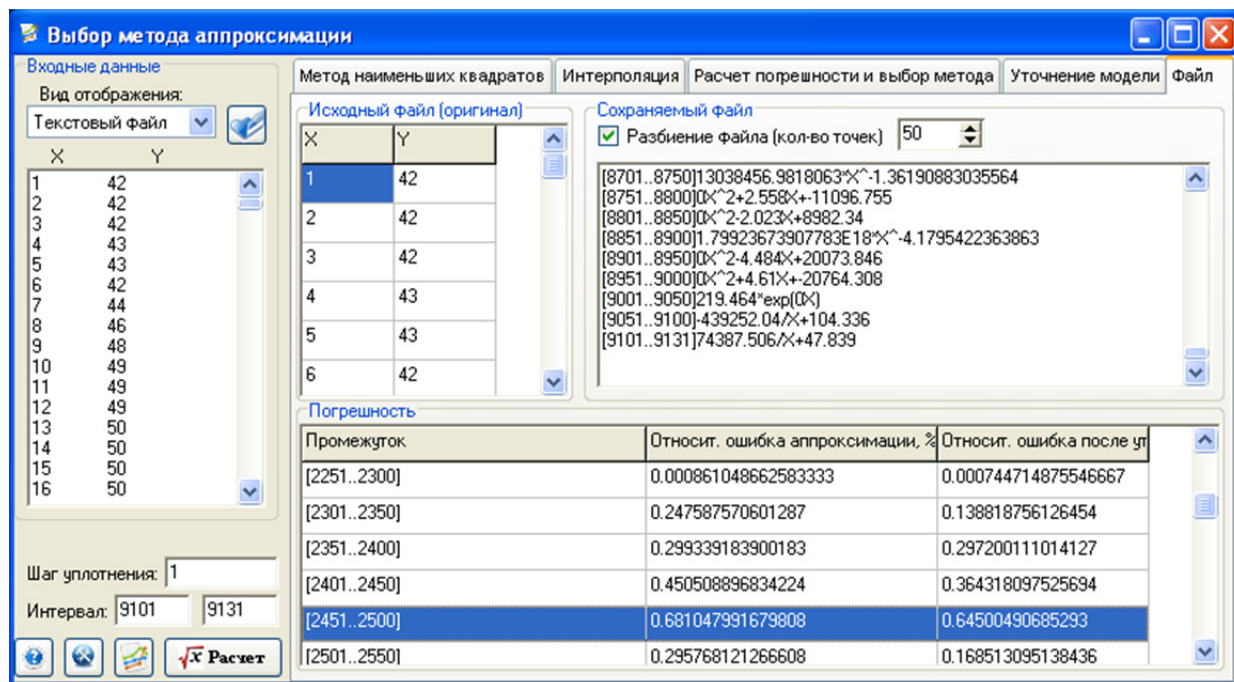


Рис. 6. Результаты нахождения модели аппроксимации для большого количества экспериментальных данных

Разбиение на части дает более точную выходную модель и низкую погрешность.

Сохраненные экспериментальные данные могут быть обработаны в любое назначенное время или при простое ЭВМ. Это снижает нагрузку на центральный процессор и обеспечивает быстрое действие при загрузке экспериментальных данных. Логическая схема данного процесса представлена на рис. 7.

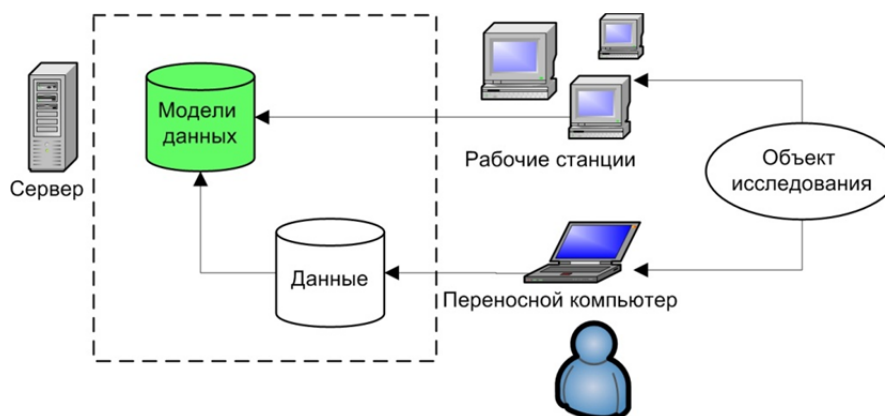


Рис. 7. Логическая схема сохранения и нахождения моделей экспериментальных данных

В связи с вышеизложенным использование уточненной модели аппроксимации позволяет достичь поставленной цели повышения точности.

Заключение

Разработанные математическая модель повышения точности аппроксимации и методика снижения погрешности аппроксимации позволили повысить точность выходной модели экспериментальных данных до 10 %.

Список литературы

1. Петрянин, Д. Л. Анализ систем защиты информации в базах данных / Д. Л. Петрянин, Н. В. Горячев, Н. К. Юрков // Труды международного симпозиума Надежность и качество. – 2013. – Т. 1. – С. 115–122.
2. Саушев, А. В. Методы назначения допусков на параметры технических систем путем линейной аппроксимации граничных точек / А. В. Саушев // Труды международного симпозиума Надежность и качество. – 2015. – Т. 1. – С. 144–147.
3. Петрянин, Д. Л. Структура системы поддержки принятия решений при архивировании данных / Д. Л. Петрянин, Н. К. Юрков // Труды международного симпозиума Надежность и качество. – 2014. – Т. 1. – С. 331–333.
4. Методика анализа данных // Электронные статьи для чтения. – URL: <https://basegroup.ru/community/articles/base> (дата обращения: 20.01.2016).
5. Выбор метода аппроксимации / Д. Л. Петрянин, Н. В. Горячев, Н. К. Юрков. – Зарегистрировано в реестре фонда алгоритмов и программ Сибирского отделения Российской академии наук. Регистрационный номер – PR15012. – URL: <http://fap.sbras.ru/node/4152>

Петрянин Дмитрий Львович

аспирант,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: ra4cbh@mail.ru

Юрков Николай Кондратьевич

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой конструирования
и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: yurkov_NK@mail.ru

Аннотация. Актуальность и цели. В настоящее время задача аппроксимации является актуальной темой решения в различных технических исследованиях. Целью является нахождение моделей аппроксимации с максимально возможной точностью и низкой погрешностью. Доказана необходимость разработки эффективных методов анализа экспериментальных кривых и построения моделей аппроксимации. **Материалы и методы.** Дана модель повышения точности аппроксимации. Описана методика снижения погрешности аппроксимации за счет многопроходных расчетов и нахождения случайной ошибки аппроксимации, которая позволяет проводить оценку результатов исследования технических систем и получать результаты, более приближенные к исходным данным. Разработан алгоритм повышения точности модели аппроксимации, на основе которого разработано программное обеспечение, позволяющее загрузить экспериментальные данные и произвести расчеты для нахождения моделей аппроксимации. Приведена методика, позволяющая уточнить модели аппроксимации, а также выявить лучшую с точки зрения погрешности ап-

Petrjanin Dmitrij L'vovich

postgraduate student,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Yurkov Nikolay Kondrat'evich

doctor of technical sciences, professor,
head of sub-department of radio equipment
design and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Abstract. Background. The challenge now is a hot topic of approximation of solutions to various technical studies. The aim is to find approximations of the models with the greatest possible precision and low error. The necessity of the development of effective methods for the analysis of experimental curves and constructing approximation models. **Materials and methods.** Dana model increasing accuracy of approximation. A technique for reducing the error of approximation by multi-pass calculations and finding random approximation error, which allows you to assess the results of the study of technical systems and get the results more close to the original data. An algorithm for improving the accuracy of approximation of the model on which developed software that allows you to download experimental data and make calculations to find the approximation models. The technique, which allows to specify the approximation of the model, and to identify the best in terms of the approximation error. **Results.** It is shown that the developed mathematical model improve accuracy and reduce error of approximation technique improved the accuracy of the output model of the experimental data up to 10 %. **Conclusions.** The use of the approximation

проксимации. *Результаты.* Показано, что разработанная математическая модель повышения точности и методика снижения погрешности аппроксимации позволили повысить точность выходной модели экспериментальных данных до 10 %. *Выводы.* Применение моделей аппроксимации позволяет оценивать полученные результаты исследования технических систем и получать результаты, более приближенные к исходным данным.

Ключевые слова: аппроксимация, данные, модель, расчет, метод.

model allows to evaluate the results of research and technical systems to obtain results more close to the original data.

Key words: approximation, the data, model, the calculation, method.

УДК 004.021, 519.651, 519.654

Петрянин, Д. Л.

Повышение точности моделей аппроксимации / Д. Л. Петрянин, Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 2 (14). – С. 59–66.